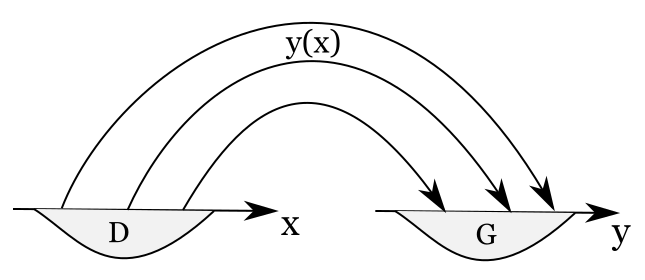
**1. понятие ф-и. Укажите основные типы функций.**

Если каждому значению переменной x из множества D ставится в соответствие одно определенное значение y из области G, то говорят, что задана ***ф-я*** y от x (y(x)).

****При этом x ‒ независимая переменная (аргумент), y ‒ зависимая переменная (ф-я), D ‒ область определения, G ‒ область значения.

***Чтобы задать ф-ю*** необходимо указать ее область определения и правило, по которому каждому значению аргумента ставится одно значение ф-и.

Способы задания:

**1.Табличный.**

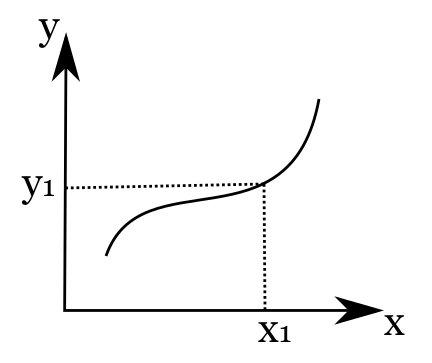
Указываются значение аргумента и функции.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

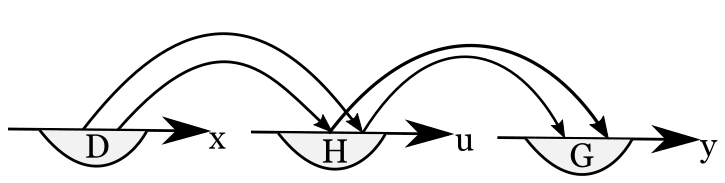
**2.Аналитический.**

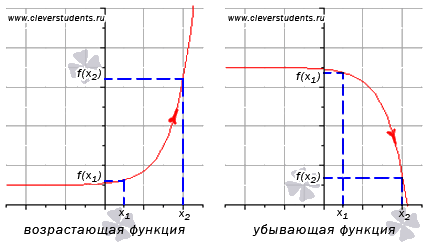
Задается формула, по которой можно вычислить значение ф-и, соответствующее заданному значению аргумента. Y=f(x).

**3.Графический.**

Состоит в задание графика ф-и, то есть линии на плоскости x и y. Абсциссы которые = значению переменной x, а ордината которая = значению переменной y

Типы:

1. Ф-я, аргументом которой является ф-я независимая от переменной, называется **сложной** (ф-я от ф-и).

2. Ф-я вида называется ***явной.*** (ф-я явно выражена через независимую переменную ).

3. Ф-я, заданная уравнением не различной относительно переменной , называется ***неявной*** (F(x,y)=0).

4. Пусть дана явная ф-я с областью определения и областью значений такова, что разным значениям аргумента из соответствуют разные значения ф-и y из . Поставим в соответствие каждому единственное значение x, при котором Полученная ф-я с областью определения и областью значений называется ***обратной***. Ф-и и называются взаимо обратными. Чтобы записать уравнение обратной ф-и, нужно решить уравнение прямой ф-и относительно переменной х. Графики взаимно обратных ф-й симметричны относительно биссектрисы I и III коорд. углов . При этом происходит замена .Условие обратимости ф-и — ее монотонность, то есть функция должна только возрастать или только убывать.

**2.Укажите основные характеристики ф-и**  
1) **Область определения ф-и и область значений ф-и.**

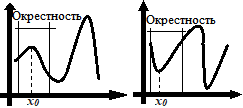
*Область определения ф-и* ‒ это множество всех допустимых действительных значений аргумента  (переменной ), при которых ф-я  определена.

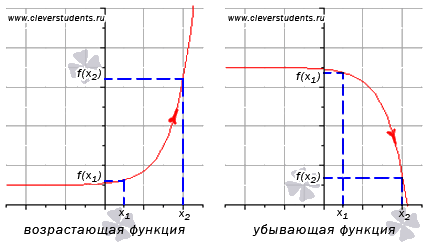
*Область значений ф-и* ‒ это множество всех действительных значений y, которые принимает ф-я.

2) **Нули ф-и**

Значение , при котором ф-я обращается в нуль, .

3) **Интервалы монотонности**

Ф-я называется *возрастающей* на интервале, если на нём большему значению аргумента соответствует большее значение ф-и.

Ф-я называется *убывающей* на интервале, если на нём большему значению аргумента соответствует меньшее значение ф-и.

4) **Четность (нечетность) ф-и**

Ф-я называется *чётной*, если при изменении знака её аргумента значение ф-и не изменяется . График четной ф-и симметричен относительно оси ординат. Пример:

Ф-я называется *нечётной*, если при изменении знака её аргумента, знак ф-и меняется на противоположный, а её абсолютная величина не изменяется .

График нечетной ф-и симметричен относительно начала координат. Пример:

5) **Ограниченная и неограниченная ф-и**

Ф-я называется  *ограниченной на интервал*, если существует такое положительное число *M*, что во всех точках интервала выполняется условие |*f*(*x*)|*M.*Если это условие не вып., то ф-я – *неограниченная на интервале*.

6) **Периодичность ф-и**

Ф-я *называется периодической*, если существует такое отличное от нуля число , что при + или - аргумента из аргумента этого числа значение ф-и не меняется

***.***

Все тригонометрические ф-и являются периодическими. График периодической ф-и повторяется при смещении вдоль оси на период.

**7)Экстремумы**

*Экстремумы ф-и* ‒ это т. минимума и максимума ф-и. т. называется **т. максимума**, если ***)*** есть наибольшее значение ф-и в некоторой окрестности этой ф-и.

Т. называется **т. минимума**, если ***)*** есть наименьшее значение ф-и в некоторой окрестности этой т.

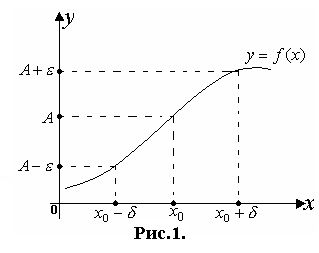
**3. Раскройте сущность понятия предела ф-и в конечной и бесконечно точке**

*Предел ф-и в конечной точке*

Если переменная х принимает значения все более близкие, но не равные х0, говорят, что х стремится к х0 (х⟶х0). Может оказаться, что при х⟶х0 значение ф-и y=f(x) неограниченно приближается к некоторому числу A. Это число называется пределом ф-и y=f(x) при х⟶ х0.

Если при всех *х*, достаточно мало отличающихся от *х0*, значения ф-и *f(x)* как угодно мало отличаются от *А*, то число *А* называют пределом ф-и f(x) при *х⟶ х0*.

Если для любого числа *>0* существует такое *>0*, что для всех *х*, удовлетворяющих условию *|х - х0|<*, выполняется условие *|f(x) - A|<*, то число *А* - предел ф-и *f(x)* при *х⟶ х0*.

*Пример:*

**Предел ф-и в б. удаленной т.**

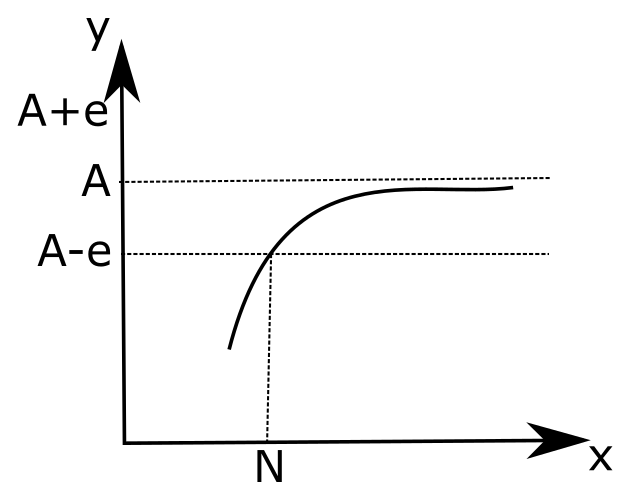
Если х принимает знач., превосходящие любое как угодно большое число, то говорят, что х стремится к бесконечности (

Может оказаться, что при *,* ф-я *y = f(x)* принимает значения, все более близкие к некоторому числу *А*. Тогда говорят, что ф-я имеет при предел =*А.*

Аналогично определяется предел ф-и при *.*

Если для всех достаточно больших значений *х* значение ф-и *f(x)* как угодно мало отличается от числа *А*, то *А* - предел ф-и *f(x)* при

Если для любого числа  *> 0* найдется такое число *N>0*, что для всех *х*, удовлетворяющих неравенству *х > N*, выполняется условие *|f(x) - A|<* , то число *А* - предел ф-и *f(x)* при *х⟶.*

Пример:*;*

**4.Раскройте сущность б.б.в.**

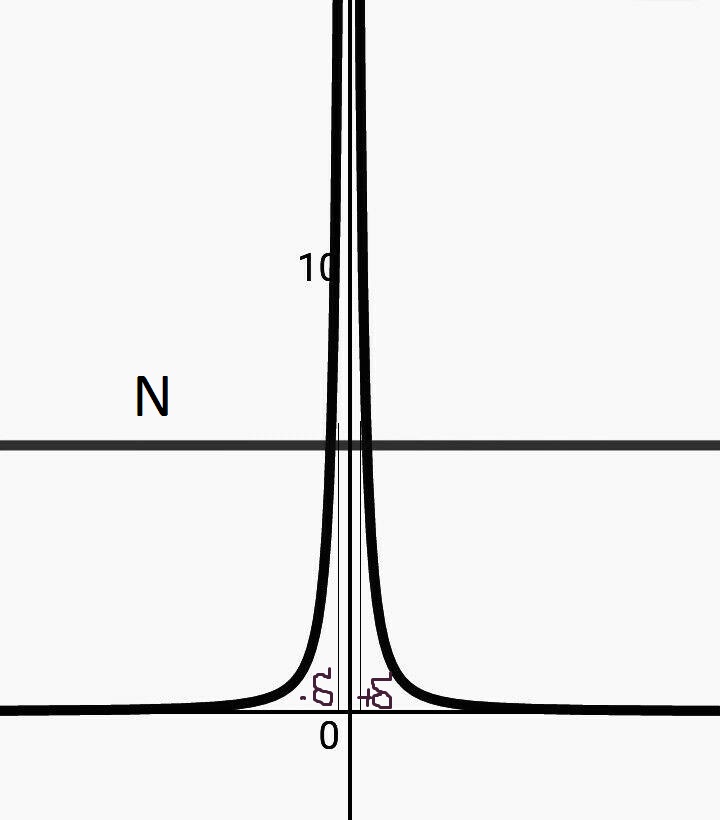
Качественное опред.:

Ф-я *y=f(x)* называется б.б.в. при , если для всех Х достаточно отличных от Х0. Значение ф-и по абсолютной величине превосходят любое, как угодно большое заданное число.

Количественное определение:

Если для любого числаM>0 существует , что для всех Х, удовлетворяющих неравенству , выполняется условие |*f(x)|>*M, то ф-ия *f(x)* является б.б.в при .

Пример:

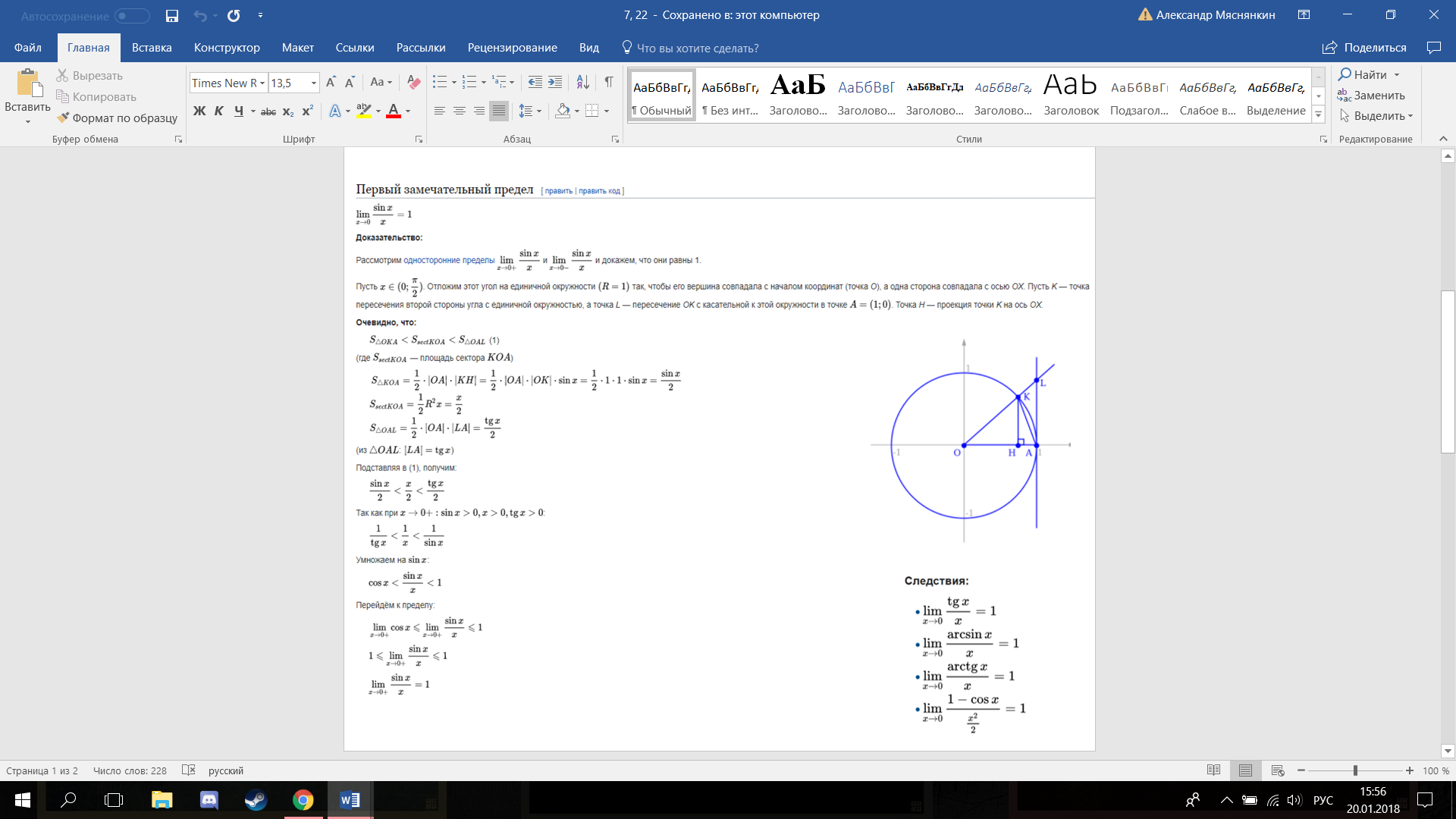


**5.Раскройте сущность б.в.м.**

Качественное:

Ф-я f(x) называется б.м.в. при х→х0, если переменная х принимает значения все более близкие, но не равные х0, говорят, что х стремится к х0 (х⟶х0). Может оказаться, что при х⟶х0 значение ф-и y=f(x) неограниченно приближается к некоторому числу A. Это число называется пределом ф-и y=f(x) при х⟶ х0.

Количественное:

Если для любого ξ>0 найдется такое δ>0, что для всех x≠x0,

|x-x0|<δ выполняется условие |f(x)|<ξ, то ф-я f(x) называется б.м.в при х→х0

Примеры б.м.в.:

y=x2 при х→0, y=x-1 при х→1, y=1/x при х→∞, y=2x при х→-∞

**6.Правило предельного перехода**

‒правила, по которым можно находить пределы ф-й.

1.***Предел суммы*** ф-й равен сум пределов каждой из них.

*=*

2.***Предел произведения***

ф-й равен произведению их пределов.

*= \**

Можно получить 2 следствия:

*Следствие 1:* постоянный множитель можно выносить за знак предела.

*=*

*Следствие 2:* предел целой степени ф-и равен этой степени ее предела.

3.***Предел частного*** ф-й равен частному их пределов, если предел знаменателя 0.

**7.Признак существования предела ф-и**

***Теорема 1.***

Пусть f(x) при X→Xo заключен между двух других ф-й Φ(x) и Ψ(x), пределы которых имеют одинаковую величине тогда предел ф-и f(x) = этой величине

Док-во:

Так как = равны А, значит, что для любого >0, найдётся δ>0,  
, то |Φ(x)-A|<;

|Ψ(x)-A|<

A-<A+;

A- <<A+

A- <<A+ => |f(x)-A|< - выполнено условие предела равного А

=A.

***Теорема 2.***

Если ф-я *y=f(x)* монотонно возрастет (убывает) в некоторой  окрест  т. хo и ограничена сверху (снизу), то она имеет предел при X→Xo

**Первый замечательный предел**

Предел ф-и , при равен единице.

=1

Док-во:

Будем исходить из геометрического определения синуса. Пусть Xϵ[0;]. Отложим этот угол на единичной окружности  (R=1)  так, чтобы его вершина совпадала с началом координат (точка O), а одна сторона совпадала с осью OX. Пусть K — т. пересечения второй стороны угла с единичной окружностью, а т. L — пересечение OK с касательной к этой окружности в т. A=(1;0). Т. H — проекция т. K на ось OX.

=sin(x)

=x

=R\*R\*tg(x)

<<

sin(x)<x<tg(x)

sin(x)<x<tg(x) Xϵ[0;]

1<< => cos(x)<<1

На основании признака существования предела ф-и, можно утверждать, что предел среднем неравенстве ф-и тоже равен 1.

В этом случае выполняется условие =1

Пример:

=[]==

\*=1\*1=1

**8.Признак существования предела последовательности** *Определение:* ***Числовой последовательностью*** называется бесконечная совокупность пронумерованных чисел, расположенных в порядке возрастания их номеров.

Если для всех достаточно больших номеров *n* члены последовательности как угодно мало отличных от *А*, то *А* называется пределом этой числовой последовательности.

;

Последовательность называется ***возрастающей***, если ее каждый последующий элемент больше ее предыдущей. <

***убывающая***, если величина ее членов уменьшается с увеличением номера.>

***ограничена сверху***, если все ее элементы не превосходят некоторого конечного числа условие:<*А*

***ограниченной снизу***>*А* (Все члены последовательности превосходят это число).

**Признак:**

*Возрастающая* последовательность, ограниченная сверху, имеет предел.

*Убывающая* последовательность, ограниченная снизу, имеет предел.

*Доказательство:* Пусть возрастает и ограничена сверху. <, <*M*.

Т. к. на интервале от до *M* находится бесконечное число т., соответствующих членам последовательности и все они лежат левее т. *M*, то это возможно только в случае, если происходит неограниченное смещение т. вблизи некоторой т. *А* из этого интервала, а это означает, что последовательность имеет предел, равный *А*.

Аналогично можно обосновать и 2 часть признака.

**Второй замечательный предел**

используется для вычисления пределов, содержащих неопределенность [].

**Теорема**: Последовательность имеет предел.

;

;

;

Можно увидеть, что выполняется условие <

Все члены последоват. не превосходят числа 3. (<3). Из этого следует на основании признака существования предела последовательности, что т. к. последовательность возрастает и ограничена сверху, то она имеет предел не превосходящий 3.

Это также справедливо для аналогичной функции:

**9. Определение непрерывности ф-и**

называется ***непрерывной в т.*** *х0*, если она определена в некоторой окрестности этой т. и ее предельное значение в этой т. равно значению ф-и в самой т. *х0*.

Ф-я называется ***непрерывной на интервале*** если она непрерывная в любой точке этого интервала.

Т.к. ***Графики всех элементов ф-и*** являются непрерывной в их области определения, то все элементы ф-и

Являются непрерывными в своей области определения.

**Действия над ф-и**

(1) ***Сумма*** непрерывных ф-й есть непрерывная ф-я.

U(x),V(x) непрерывны в точке х0;

; ;

*;*

*=*

*;*

;

Предельное значение ф-и равно значению ф-и в т.

(2) ***Произведение*** непрерывных ф-й есть непрерывная ф-я.

(3) ***Частное*** непрерывных ф-й есть непрерывная ф-я, если знаменатель не обращается в 0.

(4) ***Сложная***, составленная из непрерывных ф-й есть непрерывная ф-я.

*.* Потому сложные ф-и, составленные из элементарных ф-й непрерывны своей областью определения.

(5)***ф-я обратная*** к непрерывной монотонной ф-и непрерывна.

(6) ***Символ предела*** можно вносить под знак непрерывной ф-и.

;

Из этого св-ва следует, что при вычислении предела от элементарной ф-и в эту ф-ю можно подставить предельное значение аргумента.

**10. Охарактеризуйте точки разрыва.**

Если предел ф-и в т. не равен ее значению в самой т., то такую т. называют ***т. разрыва ф-и***.

Это возможно, если предел ф-и в т.:

1.Не существует

2.Равен

3.Равен конечной величине, не равной значению ф-и в т.

Для исследования т. разрыва используют понятие односторонних пределов ф-и в этой т.

Пусть , оставаясь меньше , если при этом значение ф-и неограниченно приближается к числу А, то А — левый предел ф-и в .

Пусть , оставаясь больше , если при этом значение ф-и неограниченно приближается к числу А, то А — правый предел ф-и в .

**Классификация т. разрыва**

Тип т. определятся величиной односторонних пределов ф-и в ней.

Т. разрыва 1-ого рода — оба односторонних предела имеют конечную величину ().

Т. разрыва 1-го рода называется устранимой, если в ней левый и правый пределы является конечными и одинаковыми по величине.

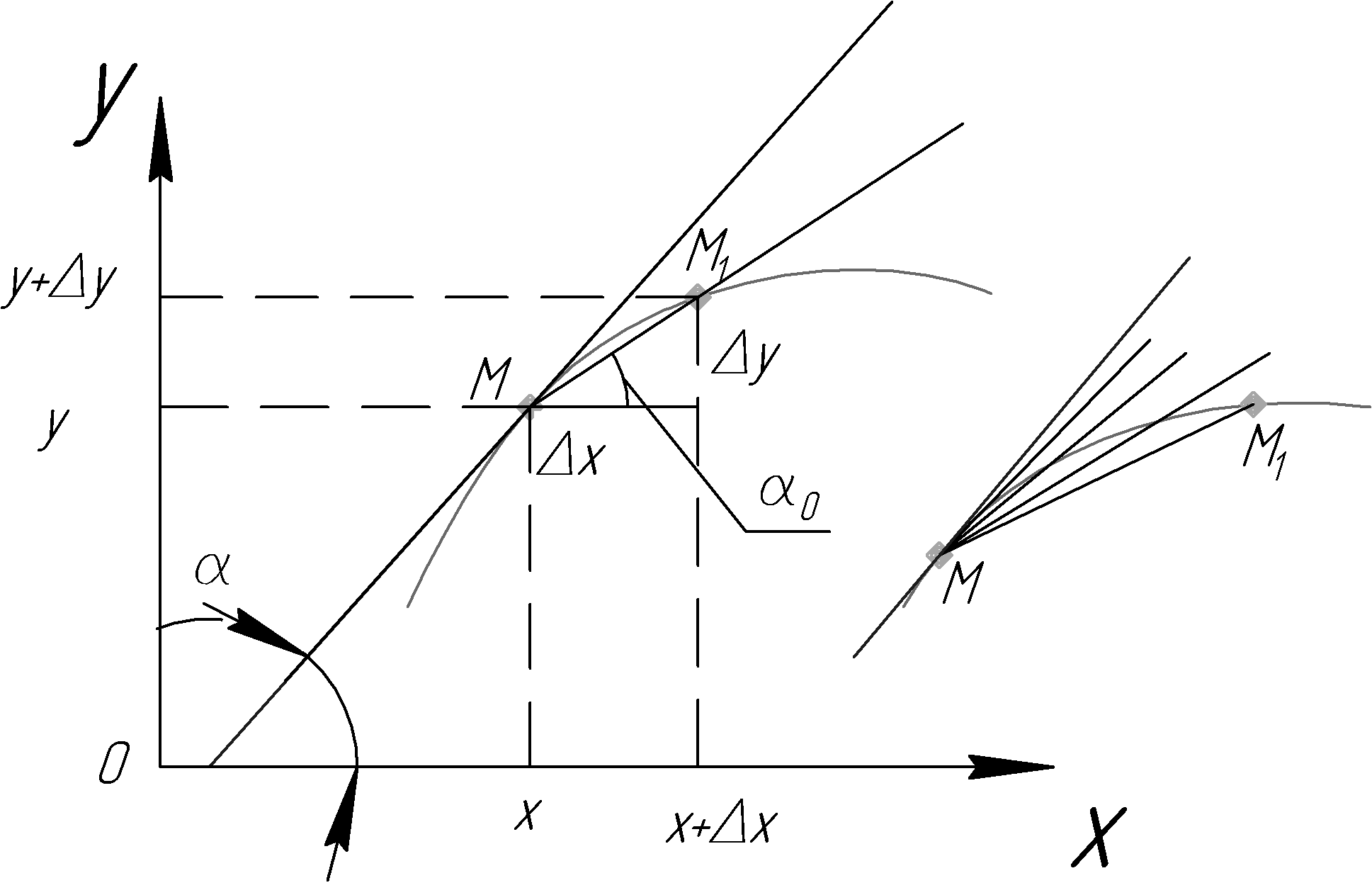
Т. разрыва 2-ого рода — хотя бы один из односторонних пределов ф-и не равен конечной величине ().

**11. Сравнение б.м.в**

Пусть даны   и  , которые являются б.м.в. при

*x**x*0 .

=0; =0

Чтобы сравнить скорости их убывания при *xx*0, нужно вычислить предел отношения

= []

Для этого предела возможны следующие варианты:

1.=0 В этом случае говорят, что   является б.м.в более высокого порядка, чем .

Пример:

 =*x*

Сравним эти отношения ==[]==0

2. =∞

Это означает, что знаменатель убывает быстрее, чем числитель

 =*x*; =

==[]==∞

3. Говорят, что   и имеют одинаковый порядок малости.

4.

В этом случае говорят, что данные величины эквиваленты

**Сравнение б.б.в**

Пусть функции u(x) и v(x) являются б.б.в. при

xx0 .

=∞; =∞

Чтобы сравнить б.б.в. нужно найти предел их отношения при xx0

В этом пределе возможны следующие варианты:

1.=0 v(x) есть б.б.в. более высокого порядка

2.=∞ u(x) является б.б.в. более высокого порядка.

3. ; имеют одинаковый порядок

4.; являются эквивалентными u(x)v(x)

**12. Определение производной ф-и**

***Производной*** y=f(x) в точке х0 называется предел отношения приращения ф-и Δу к соответствующему приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к 0.

;

Мгновенная скорость изменения ф-и называется ***производной***.

***Геометрический смысл*** состоит в том, что она равна tg угла наклона касательной к графику ф-и в данной т. Если tg этого угла меньше нуля, то ф-я является убывающей.

**Уравнение касательной и нормали**

***Касательной*** к линии в т. М называется предельное положение ее секущей ММ1 при стремлении т.М1 к М вдоль линии.

***Нормалью*** графика ф-и назыв. прямая перпен. к касат. графика в данной т.

- уравнение касательной;

Т.к нормаль⊥касательной→

; - уравнение нормали.

**13. Правила дифференцирования**

Операции вычисления производной ф-и называется ее ***дифференцированием***.

1)Производная суммы ф-й равна сумме их производных

*Док-во:*

*=*

(аналогично для разности)

2)Производная произведения двух ф-й определяется выражением

Следствие: постоянный множитель можно вынести за знак производной (c\*U)’=c\*U’

3)Производная частного двух ф-й определяется

4)Производная сложной ф-и равна производной от внешней ф-и по промежуточному ар-ту, умноженной на производную от промежуточного ар-та по независимой переменной.

5)Производные взаимообратных ф-й обратны по величине   
y= f(x) x=ф(y)

*Пример:*

**14. Методику нахождения производной сложной и обратной ф-и**

*Производная сложной ф-и*равна производной от внешней ф-и по промежуточному ар-ту, умноженной на производную от промежуточного аргумента по независимой переменной.

Пример:

**Производная обратной ф-и**

Если y=f(x) и x=g(y) — пара взаимно обратных ф-й, и ф-я y=f(x) имеет производную f'(x), то производная обратной ф-и g'(x)=1/f'(x).

Таким образом, производные взаимнообратных ф-й — обратные величины. Формула для произв. обратной ф-и:

y=x²-7lnx.

Имеем:

Отсюда

**Логарифмическое**

**дифференцирование**

состоит в последовательном применении к ф-и операций логарифмирования и дифференцирования.

*Суть* такого дифф заключается в следующем: вначале находится логарифм заданн. ф-и, а уже затем вычисляется от него производная. Пусть задана некоторая ф-я . Прологарифмируем левую и правую части данного выражения:

Далее продифференцируем полученное равенство при условии, что y  является ф-й от x, то есть найдем производную сложной ф-и:

А тогда, выражая искомую производную , в результате имеем:

Используется в 2 луч:

1. При вычисл. произв. степен-показ ф-и

2.- от ф-и предст. собой произв. неск. сложн. ф-и

**15.Методика нахождения производных основных элементарных ф-й**

Для нахождения производной от данной ф-и y=f(x), исходя из общего определения производной, необходимо:

1)дать аргументу x приращение вычислить наращенное значение ф-и:

2)найти соответствующее приращение ф-и:

3)составить отношение приращения ф-и к приращению аргумента:

4)найти предел данного отношения при :

*Например:*

**Таблица производных основных элементарных функций**

**16. Методику дифференцирования неявных и параметрических ф-й.**

***Неявной*** называется ф-я, заданная у-м неразрешенным относительно переменной y.

Чтобы найти производную неявной ф-и нужно продифференцировать ее уравнение, учитывая, что является ф-й , а затем выразить производную .

Уравнение неявно определяет на интервале

(-1;1) две ф-и Пусть ‒ любая из этих ф-й. Тогда дифференцируя по тождество получим Отсюда т.е

Если переменные и заданы, как ф-и некоторой третьей переменной, называемой параметром, ф-я называется ***параметрической***.

Пусть заданы ф-и .

Если при этом на интервале имеет обратную , то определена новая ф-я )). Дифференцируя ее по и используя правило дифференцирования обратной ф-и, получаем:

\*Правило дифференцирования обратной ф-и: производные взаимообратных функций обратны по величине.

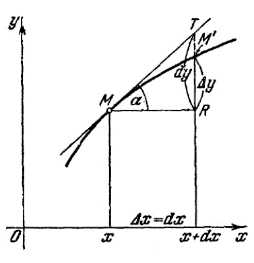
Пример: Найти , если ,

\*Вторая производная ф-и, заданной параметрически:

***Производная высших порядков***

2-ой производной ф-и или производной 2-ого порядка называется производная от ее 1-ой производной: .

n-ой производной ф-и называется производная от ее (n-1) производной.

**Вычисление производных высших порядков производиться с использованием тех же правил и таблицы производных что и от первых производных

**17.Определение дифференциала ф-и, Охарактеризуйте понятие**

Пусть - ф-ция непрерывная при рассматриваемых значениях *x* и имеющая производную

(**).**  
***,*** предел ф-и равен

Согласно теореме о связи бесконечно малых величин -бесконечно малая величина при

Отсюда находим, что

то есть приращение ф-ции состоит из главной и неглавнойчастей.

*Определение:* ***Дифференциалом*** ***y*** ф-и

в т.  называется главная линейная по  часть ее линии превращения , в этой т. .

На приращение аргумента:

**.**

*Замечание:*Приращение независимой переменной называют ее дифференциалом , т.е

Формула для дифференциала перепишется в виде:

**.** Таким образом, ***дифференциал ф-и*** равен произведению производной указанной ф-и на дифференциал независимой переменной.

***,*** *т.е. производную ф-и можно представить как отношение двух дифференциалов.*

**Геометрический смысл дифференциала ф-и**

состоит в том, что он равен приращению ординаты касательной, проведённой к графику ф-и в данной т.( а не приращению самой ф-и y!)

*См.рисунок*Отрезок RT-дифференциал;приращение ординаты точки; ; разность между дифференциалом и приращением, этот отрезок при является б.м.в. более высокого порядка, чем MR.

**Понятие дифференцируемости ф-и**

Ф-я называется ***дифференцируемой***, если у неё существует дифференциал. Дифференциал существует, если есть производная. Если производной нет, то ф-я является не дифференцируемой.

Если ф-я дифференцируема на интервале, то она на нем непрерывна.

Дифференцируемость ф-и св-во более сильное, чем ее непрерывность, поэтому, если ф-я дифференцируема, то она обязательно непрерывна, а если непрерывна, то не всегда дифференцируема.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Дано: | Знаем: | Необходимо найти: |
|  |  |  |

**18. Изложите методику применения дифференциала ф-и к приближенным вычислениям**

Применение дифференциала к приближенному вычислению значений ф-й основано на замене приращения

выражением .

Известно, что приращение ф-и равно сумме ее дифференциала и бесконечно малой величины.

При уменьшении значения аргумента б.м.в быстро убывает и ею можно пренебречь.

Итак, для малых :

C помощью этой формулы, зная значения ф-и и ее производной в исходной точке , можно вычислить значение ф-и в смещенной точке ().

**19.Изложите основные теоремы о дифференцируемых ф-х.**

**1.Теорема Ферма**

Пусть ф-я непрерывная на замкнутом интервале [Х1;X2] и принимает в его некоторой внутренней точке наибольшее или наименьшее значение(, тогда, если в этой точке)она дифференцируема, то ее производная в ней равна нулю или не существует.

*Геометрический смысл теоремы* в том, что в точке максимума или минимума касательная к графику должна быть горизонтальна( параллельна оси абсцисс).  
Док-во:  
Если ф-я f(X) принимает в точке свое наибольшее значение, то это значит,что ) для всех [Х1;X2]

Т.к. производная в точке существует, то левый предел должен быть равен правому, а это возможно только в случае, если они оба равны нулю: fлевый

**2.Теорема Ролля**

Пусть ф-я *f(x)*непрерывная на замкнутом интервале [Х1;X2], дифференцируема во всех его внутренних точках и принимает на концах интервала равные значение, то в этом интервале существует хотя бы одно значение x= для которого производная равна нулю(()=0).

Док-во: Если на концах интервала , a)ф-я не меняется на всем интервале (при всех значениях x); б)ф-я не постоянна на интервале, то хотя бы в одной т. интервала она принимает наибольшее или наименьшее значение, тогда в точке , где ф-я принимает наиб. или наим. значение, производная равна нуля(по теореме Ферма) .

**3.Теорема Лагранжа**

Пусть ф-я *f(x)*непрерывная на замкнутом интервале [Х1;X2], дифференцируема во всех его внутренних т., тогда хотя бы в одной точке выполняется условие *Следствие:*  
Приращение значения функции на конечном интервале определяется формулой:

–формула конечных приращений Лагранжа. Она позволяет вычислять приращение ф-и на интервале через приращение аргумента и значение производной ф-и в некоторой точке интервала.

**20.Сформулируйте правило Лопиталя и изложите методику его использования для вычисления пределов с неопределенностями различных типов.**

***Правило Лопиталя:***

Пусть ф-и f(x) и g(x) дифференцируемы в некоторой определен. Т. x0 и при х → x0 обе ф-и одновременно стремятся к нулю или к бесконечности, тогда предел их отношения при x→x0 равен пределу отношения их производных, если этот предел существует:

С помощью правила Лопиталя можно вычислить предел с другими неопределенностями, для этого нужно преобразовать предел так, чтоб образовалась неопределенность или .

Например:

*Доказательство:* Пусть ф-и f(x) и g(x) при х →х0 обе стремятся к нулю. Так как ф-и дифференцируемы в некоторой окрестности точки x0, то они в этой окрестности непрерывны и => их предельное значение равно значению в этой точке.

Доказательство:

**21.Дайте определение интервала монотонности и экстремума ф-и. Сформулируйте их признаки и методику нахождения.**

**Интервалы монотонности ф-и**

Ф-я f(x) – ***возрастающая*** на интервале , если на нем большему значению аргумента соответствует большее значение ф-и.

X1 <X2 F(x1) <F(x2)

***Убывающая*** – большему значению аргумента соответствует меньшее значение ф-и.

***Монотонность*** – интервалы возрастания и убывания ф-и.

Достаточный признак монотонности ф-и:

Пусть ф-я непрерывна на интервале и дифференцируема во всех его внутренних точках. Если производная положительна во всех внутренних точках интервала, то ф-я возрастает, если производная отрицательная, то ф-я убывает.

a<x<b

a<x1<x2<b

f(x2)-f(x1) = f’(ξ)(x2-x1) формула конечных приращений Лангранжа.

f’(ξ) > 0(полож. на интерв.) f’(ξ)<0(отрицат. на интервале)

x2>x1 x2>x1

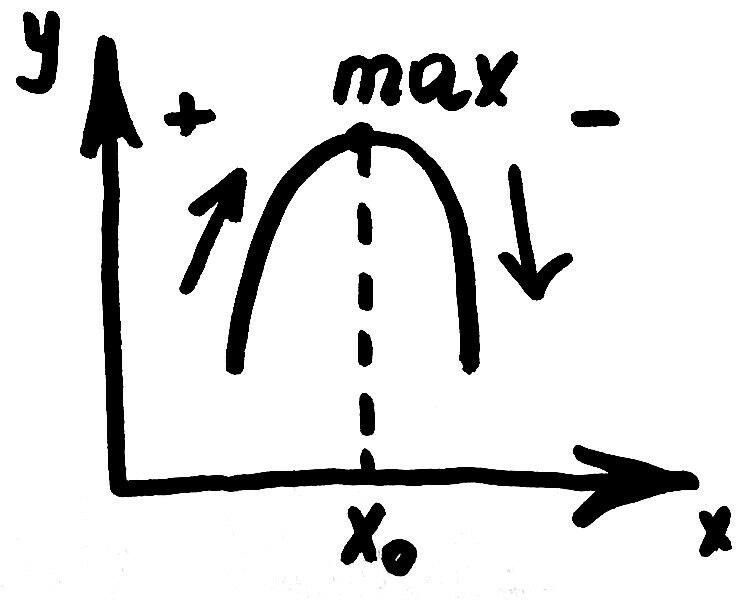
f(x2) > f(x1) f(x1) > f(x2)

→Для нахождения интервала монотонности ф-и нужно определить интервалы на которых ее производная сохраняет знак.

**Экстремумы функции**

X = X0 – ***максимум ф-и***, если f(x0) – есть наибольшее значение ф-и в некоторой окрестности этой точки.

X0 – ***минимум ф-и***, если f(x0) – есть наименьшее значение ф-и в некоторой окрестности этой т.

Точки max и min ф-и называются ее ***экстремумами***.

Необходимый признак экстремума ф-и:

Если ф-я имеет экстремум в некоторой т. x0, то ее производная в этой т. равна 0 или не существует.

Док-во: Если ф-я имеет экстремум в x0, то ее значение в этой т. является наибольшим или наименьшим. В соответствие с теоремой Ферма производная в этой т. должна быть равна 0 или не существовать. tgα = 0 f’(x0) = 0; f’(x0)-не существует.

→Ф-я может иметь экстремум только в т., в которых ее производная равна 0 или не существует и ни в каких других. Такие точки называются *критическими т. первого рода*. Но в критической т. ф-я не обязательно имеет экстремум.

Для того чтобы узнать является ли т. критической, нужно использовать достаточный признак.

Первый достаточный признак экстремума:

Пусть ф-я f(x) – непрерывна в некоторой окрестности критич. т. x0 и дифференцируема в ней за исключением может быть самой т. x0. Тогда если слева от x0 производная ф-и больше 0 , а справа производная меньше 0, то x0 – max.

Если слева от x0 производная < 0, а справа производная > 0, то x0 – min.

Если знак производной слева и справа одинаковый – это не т. экстремума.

**22. Изложите второй достаточный признак экстремума**

**Второй достаточный признак экстремума**

Пусть ф-я непрерывна в некоторой окрестности т. и имеет в ней непрерывную 1-ю и 2-ю производную, тогда, если в этой т. fʹ()=0, а fʹʹ()≠0, то-т. экстремума. Причем, если fʹʹ()>0, то – т. минимума, а если fʹʹ()<0, то – т. максимума. Если же в ней fʹʹ()=0, признак не применим.

*Доказательство:*

Пусть в т. fʹ()=0 и fʹʹ()>0. Предполагая вторую производную непрерывной, мы можем считать, что она сохраняет свой знак в некоторой окрестности т. . Отсюда следует, что ф-я fʹ(x) в этой окрестности будет возрастающей, потому что её производная fʹʹ(x)>0. Так как fʹ()=0, то слева от точки производная fʹ(x), принимая меньшие значения, будет отрицательной: fʹ(x)<0, а справа, - принимая большие значения, - положительной: fʹ(x)>0. Итак, ф-я fʹ(x) при переходе x через меняет свой знак с – на +, и , согласно 1-му достаточному признаку, т. является т. минимума. Аналогично для fʹ()=0 и fʹʹ()<0.

В том случае, когда fʹ()=0 и fʹʹ()=0, а так же в случае, когда первой производной не существует, вторым признаком воспользоваться нельзя и нужно обратиться к первому признаку.

**Методика нахождения наибольшего и наименьшего значения ф-и на интервале**

Непрерывная ф-я может принимать наибольшее или наименьшее значение или в точках эктремума, находящихся на интервале, или на его концах.

Пусть ф-я f(x) непрерывна и дифференцируема на отрезке [a;b], то для нахождения наибольшего и наименьшего значения ф-и на отрезке нужно:

1.Найти производную ф-и, найти стационарные т. (решаем уравнение, приравнивая производную к нулю)

2. Среди полученных стационарных т. выбрать те, которые принадлежат отрезку [a;b]

3. Найти значение в стационарных т. и в концах отрезка, то есть f(a) и f(b).

4. Среди полученных значений выбрать наибольшее или наименьшее.

**23.Дайте определение интервала выпуклости и вогнутости графика ф-и. Сформулируйте их признаки и методику их нахождения.**

**Интервалы выпуклости и вогнутости графика функции**

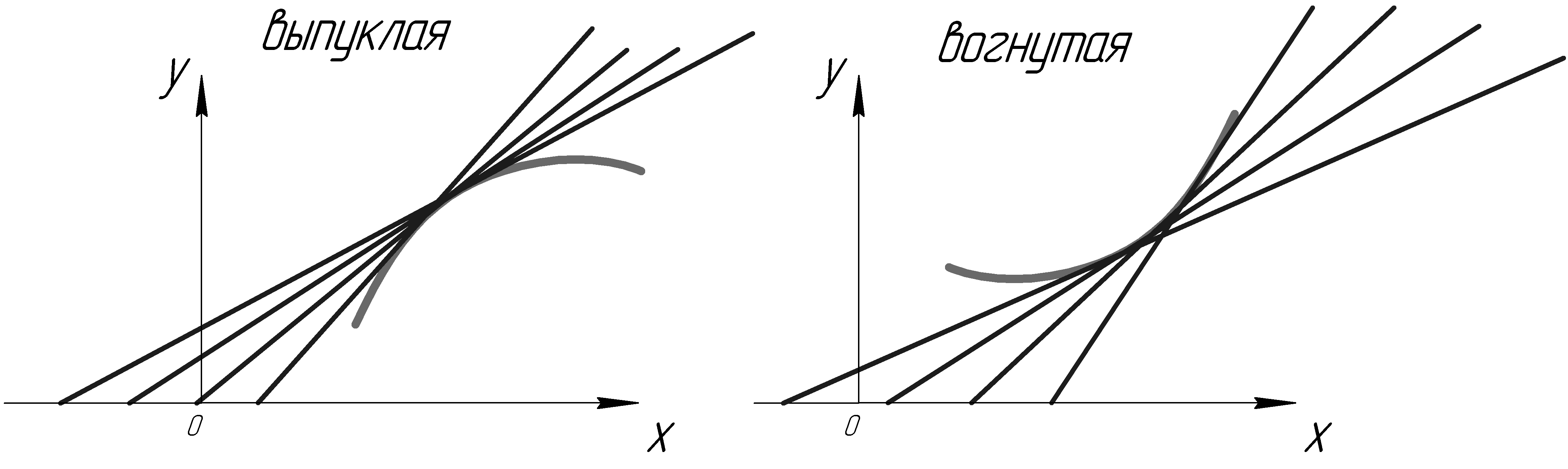
Дуга кривой называется ***выпуклой***, если она расположена ниже касательной проведенной в любой её т..

Дуга кривой называется ***вогнутой***, если она расположена выше касательной проведенной в любой её т..

Существует ***достаточный признак*** выпуклости или вогнутости графика ф-и на интервале:

Пусть ф-я непрерывна на замкнутом интервале и дважды дифференцирована во всех его внутренних т., тогда, если во всех т. интервала f”(x)<0, то на этом интервале график ф-и есть выпуклая линия, если же во всех т. интервала f”(x)>0, то график ф-и есть вогнутая линия.

|  |  |
| --- | --- |
| f”’(x)<0 f’(x) – убывающая  f’(x)=tgα – убывающая | f”’(x)>0 f’(x) – возрастающая  f’(x)=tgα - возрастающая |

****

**Точки перегиба графика ф-и**

Точки, разделяющие интервалы выпуклости и вогнутости графика функции называются его ***точками перегиба***.

Необходимый признак т. перегиба:

Если Xo – абсцисса т. перегиба графика ф-и, то вторая производная ф-и в ней равна 0 или не существует.

*Доказательство:* Т.к. точка перегиба есть граница интервалов выпуклости и вогнутости графика ф-и, то f” слева и справа от этой т. должна иметь разные знаки. Если f’’ непрерывна, то она в этой т. должна быть равна 0, в противном случае она имеет разрыв, т.е. не существует.

Точки, в которых f”(x) ф-и равна 0 или не существует называются критическими т. 2 рода, в этих т. только у её графика могут быть точки перегиба.

Достаточный признак точки перегиба:

Пусть в некоторой окрестности критической точки 2 рода ф-и непрерывна и непрерывна также вторая производная, кроме, может быть самой этой т., тогда если слева и справа от этой т. вторая производная имеет разные знаки, то это т. перегиба.

Доказательство: Т.к. слева и справа от данной т. Xo знаки второй производной разные, то с одной стороны от этой т. график ф-и– выпуклый, а с другой – вогнут, а т.к. ф-я в этой точке существует, то данная т. есть граница интервалов выпуклой и вогнутой ф-и, а значит это т. перегиба.

**24.Раскройте сущность асимптот графика ф-и и изложите методику их нахождения.**

***Асимптота*** – прямая, обладающая тем св-ом, что расстояние от т. кривой до этой прямой стремится к нулю при удалении т. вдоль ветви в бесконечность.

***Асимптота графика***  - прямая к которой неограниченно приближается график при удалении от начала координат.

*Асимптоты:* вертикальная, наклонная, горизонтальная.

Наклонные: правая x→+∞ , левая x→ -∞.

***Вертикальные асимптоты***: существует y в ее точках разрыва.

Для выяснения того, как ведет себя ф-я вблизи вертикальной асимптоты, нужно вычислить ее односторонние пределы в этой т..

; ;

Наклонные асимптоты – это прямые к которым приближается график ф-и при или при ;

;

;

;

Если хотя бы один двух пределов не равен конечному числу, то график ф-и не имеет асимптоты при .

Аналогично нахождение асимптоты графика ф-и при .

**25. Изложите сущность формулы Тейлора и методику разложения ф-и по формуле Тейлора.**

Формула Тейлора позволяет выразить значение ф-и в некоторой смещенной т. через значение ф-и и ее производных в исходной т.

Пусть дана ф-я и известно значение ф-и и всех ее производных в некоторой т. ; бесконечное число раз дифференцируема в окрестностях т. , необходимо найти значение ф-и в некоторой смещенной точке ; представим ф-ю в виде:

Аналогично и для следующих производных.

Получается, что и

Теперь подставим полученные параметры в исходное выражение:

Еще можно записать так: